

טורי פורייה והתמרות אינטגרליות - תרגיל בית 3 התמרת פורייה

עבור $f \in G(\mathbb{R})$ נגדיר את התמרת פורייה של f :

$$\widehat{f}(w) = F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx$$

1. (א) נתון $\widehat{f}(w) = \frac{w}{1+w^4}$ חשבו את $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$

(ב) נתון $\widehat{f}(w) = \frac{w}{1+w^4}$ חשבו את $f'(0)$ (בטאו את התשובה בצורה אינטגרלית).

(ג) נתון $\widehat{f}(w) = \frac{w}{1+|w|^3}$ חשבו את $\int_{-\infty}^{\infty} |f * f'|^2(x) dx$

2. (א) חשבו $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx$

(ב) חשבו $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx$

(ג) תהי $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{\sin(a(x-y))}{\pi(x-y)} dy$ עבור $a > 0$.
חשבו את התמרת פורייה של g .

(ד) הראו

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ay)}{y} \cdot \frac{\sin(x-y)}{(x-y)} dy = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & ; 1 \leq a \\ \frac{\sin(ax)}{x} & ; 0 < a \leq 1 \end{cases}$$

לפתרון תרגילים אלו ניתן לחשב את התמרת פורייה של

$$P_a(x) = \begin{cases} 1 & ; |x| \leq a \\ 0 & ; a < |x| \end{cases}$$

ו-

$$Q_a(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{a} & ; 0 \leq x \leq a \\ 1 + \frac{x}{a} & ; -a \leq x < 0 \\ 0 & ; a < |x| \end{cases}$$

3. נתונה פונקציה $u(x, t)$ בעלת נגזרות חלקיות מסדר שני רציפות עבור כל (x, t) . הפונקציה u מקיימת $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ו- $u(x, 0) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}}$. מצאו את $u(x, t)$.

4. נתונות $f, g \in G(\mathbb{R})$ כך ש- $|f(x)| \leq 1$, $|g(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^2}$, $g' \in G(\mathbb{R})$ ו- $|g'(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^2}$ עבור כל x וכאשר $M > 0$. יהיו \hat{f} ו- \hat{g} התמורות פורייה של f ו- g בהתאמה. הפונקציה u מוגדרת ע"י:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(w) \hat{f}(w) e^{iwx} dw$$

(א) הוכיחו ש- u חסומה.

(ב) הוכיחו ש- u' חסומה.

5. יהי V מרחב הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $(-\infty, \infty)$, עם המכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$$

וכך ש- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$ עבור כל f ב- V .

נתונה סדרת פונקציות $\varphi_n(x) = \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\pi x} e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$.

(א) הוכיחו ש- $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ מערכת אורתוגונלית ב- V .

(ב) מצאו קבועים $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ כך ש:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1+x^2} - \sum_{n=-N}^{n=N} c_n \varphi_n(x) \right|^2 dx$$

יהיה מינימלי.

6. נתונה הפונקציה

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+w^2} & ; 0 \leq w \\ 0 & ; w < 0 \end{cases}$$

(א) הוכיחו ש- $\int_{-\infty}^{\infty} g(w) e^{-iwx} dw$ מתכנס.

(ב) האם קיימת $f \in G(\mathbb{R})$ כך ש- g היא התמרת פורייה שלה?

7. נתונות הפונקציות $f_1(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$, $f_2(x) = \frac{1}{b^2+x^2}$ כאשר $a, b > 0$. חשבו את הקונבולוציה $f_1 * f_2$.